

Нормальное напряжение: $\sigma = \frac{N}{F}$; относительная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$; Закон Гука:

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$; $\sigma = E \cdot \varepsilon$; $\varepsilon = \frac{N}{E \cdot F}$; абсолют. удлинение $\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot F}$; относит. поперечная

деформация $\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}$; коэфф. Пуассона $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$; удлинение стержня $\Delta L = \int_0^L \frac{N(z)}{E \cdot F(z)} dz$;

работа при растяжении $A = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$; потенциальная энергия $U = A = \frac{P^2 L}{2 \cdot E \cdot F}$; учет

собств. веса стержня: $N(z) = P + \gamma \cdot F \cdot L$; $\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot L$; $\Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot F} + \frac{\gamma \cdot L^2}{2 \cdot E}$; условие

прочности при растяж.-сж: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$; $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$ – допуск. напр.; линейное напряженное

состояние: полное напр.: $p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P}{F} \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha$; нормальное: $\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$;

касательное:

$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$; на перпендикулярных площадках $\sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha$; $\tau_\beta = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$;

$\tau_\beta = -\tau_\alpha$; главные напряжения: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; на наклонной площадке:

$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$; $\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha$ или

$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$; закон парности касательных напр. $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$;

$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$; $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$; $\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$;

$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$; $\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$; $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$; макс. касательное

напряжение $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$; главные напр-ния $\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$;

положение главных площадок $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$; $\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_2}$;

объемное напряженное состояние: $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3$;

$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}$; макс. касат. напр. $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$;

напряжения по октаэдрической площадке $\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$;

$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$; $\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2}$;

интенсивность напряжений $\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$;

первый инвариант: $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)];$$

относит. объемная деформация $\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$; $\theta = \frac{1-2\cdot\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$;

среднее напряжение $\sigma_{ср} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$; $\theta = \frac{1-2\cdot\mu}{E}3\sigma_{ср} = \frac{\sigma_{ср}}{K}$; модуль объемной

деформации: $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$; потенц. энергия $U = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$; удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{F \cdot L} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}; \quad u = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2};$$

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]; \quad u = u_0 + u_\phi; \quad \text{энергия из-за изменения}$$

объема: $u_0 = \frac{1-2\mu}{6 \cdot E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$; энергия из-за изменения формы:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3 \cdot E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3]; \quad \text{тензор напряжений:}$$

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad \text{тензор для главных напряжений: } T_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Инварианты напряженного состояния:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2;$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{zx}\tau_{yz}.$$

Сопоставление зависимостей напряженного и деформированного плоского сост.:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \quad \frac{\gamma_\alpha}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha; \quad \text{Инварианты деформированного состояния:}$$

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2;$$

$$\text{тензор деформаций: } J_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}; \quad T_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

1-ая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений): $\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]$.

2-ая теор. прочности (теория наибольших относительных деформаций): $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]$.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \text{условие прочности } \sigma_{\text{эквII}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

3-я теор. проч. (теория наибольших касательных напряжений): $\tau_{\max} \leq [\tau]$, $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$,

условие прочности: $\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$, $\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$. При $\sigma_y = 0$

$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$. 4-я теор. прочности (энергетическая теория):

$u_{\phi} \leq [u_{\phi}]$. $\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{0,5 \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]$. Для плоского напряж.

сост.: $\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$. $\sigma_y = 0, \Rightarrow \sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$.

Теория прочности Мора: $\sigma_{\text{эквM}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \cdot \sigma_3$, когда допускаемые напряжения на

растяжение $[\sigma_p]$ и сжатие $[\sigma_c]$ не одинаковы (чугун).

Чистый сдвиг. $\tau = \frac{Q}{F}$; угол сдвига $\gamma \approx \frac{\delta}{a}$. Закон Гука при сдвиге: $\gamma = \tau/G$; $\tau = G \cdot \gamma$;

модуль сдвига (модуль второго рода): $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; потенциальная энергия при сдвиге

$U = \frac{\delta \cdot Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF}$; удельная потенц. энергия: $u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GFaF}$; объем $V = a \cdot F$; $u = \frac{\tau^2}{2G}$;

Геометрические характеристики сечений: площадь $F = \int_F dF$; статический момент

относительно оси x или y: $S_x = \int_F y dF$; $S_y = \int_F x dF$; координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{S_y}{F}; y_C = \frac{S_x}{F}; S_x = \sum_{i=1}^n F_i y_i; S_y = \sum_{i=1}^n F_i x_i; x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i};$$

Осевой момент инерции: $J_x = \int_F y^2 dF$; $J_y = \int_F x^2 dF$; полярный момент инерции: $J_p = \int_F \rho^2 dF$;

$J_y + J_x = J_p$; центробежный момент инерции: $J_{xy} = \int_F xy dF$. Прямоугольник: $J_x = \frac{bh^3}{12}$;

$J_y = \frac{hb^3}{12}$; $J_{xy} = 0$. Круг: $J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$; $J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$; $J_{xy} = 0$. Четверть круга:

$J_y = J_x = 0,055R^4$; $J_{xy} = \pm 0,0165R^4$; $J_{x0} = 0,0714R^4$; $J_{y0} = 0,0384R^4$. Моменты инерции

относительно параллельных осей: $J_{x1} = J_x + a^2 F$; $J_{y1} = J_y + b^2 F$; $J_{y1x1} = J_{yx} + abF$. Моменты

инерции при повороте осей: $J_{x1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$; $J_{y1} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha +$

$J_{xy} \sin 2\alpha$; $J_{x1y1} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$; $J_{y1} + J_{x1} = J_y + J_x$. Угол, определяющий

положение главных осей: $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{xy}}{J_y - J_x}$. Мом-ты инерц. относит. главн. центр. осей

инерц.: $J_{\max \min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}$; $J_{\max} + J_{\min} = J_x + J_y$.

Радиус инерции: $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$; $J_x = F \cdot i_x^2$, $J_y = F \cdot i_y^2$. Осевой момент сопротивления:

$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$; для прямоугольника: $W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$; $W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{b^2h}{6}$; для круга:

$W_x = W_y = \frac{J_x}{R} = \frac{\pi \cdot R^3}{4}$; трубчатое сечение (кольцо): $W_x = W_y = \frac{J_x}{d_H/2} = \frac{\pi \cdot d_H^3}{32} (1 - \alpha^4)$;

$\alpha = d_H/d_B$. Полярный момент сопротивления: $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$; для круга: $W_p = \frac{\pi \cdot R^3}{2}$.

Кручение. $\tau = \frac{M_k \rho}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}$, $W_p = \frac{J_p}{R}$. Угол закручивания: $\varphi = \frac{M_k L}{GJ_p}$; относит. угол

закручивания: $\theta = \frac{\varphi}{L} = \frac{M_k}{GJ_p}$. Потенциальная энергия при кручении: $U = \frac{1}{2} M_k \varphi = \frac{M_k^2 L}{2GJ_p}$;

Условие прочности: $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]$; $[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[n]}$; условие жесткости: $\theta_{\max} \leq [\theta]$. Кручение

бруса прямоугольного сеч.: $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}$; $\varphi = \frac{M_k L}{GJ_k}$; $W_k = \alpha hb^2$; $J_k = \beta hb^3$; $\tau = \gamma \cdot \tau_{\max}$.

Изгиб. $M = \int_F \sigma y dF$; $Q = \int_F \tau_y dF$; $N = \int_F \sigma dF$. Нормальные напряжения: $\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho}$. Закон

Гука при изгибе: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x}$, формула Навье: $\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}$. Максимальные напряжения:

$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{J_x}$, $J_x/y_{\max} = W_x$ — момент сопротивления сечения при изгибе, $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}$.

Касательные напряжения — формула Журавского: $\tau = \frac{Q \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot J_x}$. Для прямоугольного

сечения: $\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F}$, $F = b \cdot h$, для круглого сечения: $\tau_{\max} = \frac{4Q}{3F}$, $F = \pi \cdot R^2$, для любого

сечения: $\tau_{\max} = k \frac{Q}{F}$. Главные напряжения при поперечном изгибе:

$\sigma_{\max \min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$.

Условие прочности по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$, условие прочности по касательным напряжениям $\tau = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot J_x} \leq [\tau]$. $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$

Условия прочности по различным теориям прочн.: I-я: $\sigma_{\text{эКБИ}} = \frac{1}{2}[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]$;

II-я: $\sigma_{\text{эКБИ}} = 0,35\sigma + 0,65[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]$ (при коэфф.Пуассона $\mu=0,3$);

III-я: $\sigma_{\text{эКБИ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$, IV-я: $\sigma_{\text{эКБИ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$,

теория Мора: $\sigma_{\text{эКБИ}} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$, $m = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$.

Закон Гука при изгибе: $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E \cdot J_x}$. $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^3}} = \frac{M(x)}{EJ}$ — дифференциальное

уравнение изогнутой оси балки. Приближенное дифференциальное уравнение

изогнутой оси балки: $\pm EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$. $\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \int M(x) dx + C$ — уравнение углов

поворота, $y = \frac{1}{EJ} \iint M(x) dx dx + Cx + D$ — уравнение прогибов. Метод начальных параметров.

$EJ y'' = M(x) = R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2} - M(x-a)^0 + q \frac{(x-a)^2}{2} - P(x-a-b)$; интегрируем:

$EJ y' = EJ \theta_0 + R_A \cdot \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} - M(x-a) + q \frac{(x-a)^3}{6} - P \frac{(x-a-b)^2}{2}$;

$EJ y = EJ y_0 + EJ \theta_0 x + R_A \cdot \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - M \frac{(x-a)^2}{2} + q \frac{(x-a)^4}{24} - P \frac{(x-a-b)^3}{6}$.

Дифференциальные зависимости при изгибе: $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$; $\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$;

$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$; $\frac{dy}{dx} = \theta$. Определение перемещений способом фиктивной нагрузки.

$\frac{d^2 M}{dx^2} = q$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$; $\frac{dy}{dx} = \theta$; $\frac{dM_\phi}{dx} = Q_\phi$ $y = \frac{M_\phi}{EJ}$; $\theta = \frac{Q_\phi}{EJ}$. Теорема о трех моментах:

$M_{n-1}L_n + 2 \cdot M_n(L_n + L_{n+1}) + M_{n+1}L_{n+1} = -6 \cdot (\frac{\omega_n a_n}{L_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}})$.

Косой изгиб. Напряжение в произв. точке с координатами "x,y": $\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}$;

$\text{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x}$, $M_x = M \cdot \cos \alpha$; $M_y = M \cdot \sin \alpha$, $\sigma = M(\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{J_y})$. Уравнение нейтр. линии:

$$\frac{M_x y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{J_y} = 0, \text{ или } \frac{y_0 \cos \alpha}{J_x} + \frac{x_0 \sin \alpha}{J_y} = 0. \text{ Угол наклона нейтральной линии к}$$

$$\text{главной оси "x": } \operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{M_y J_x}{M_x J_y}. \operatorname{tg} \beta = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha. \text{ Наиб. напр.}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

$$W_x = J_x / y_{\max}; W_y = J_y / x_{\max}. \text{ Прогиб "f": } EJ_x \frac{d^2 w}{dz^2} = M_x; EJ_y \frac{d^2 v}{dz^2} = M_y, f = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Внецентренное сжатие–растяжение. Нормальное напряжение в произвольной точке:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y; N > 0 - \text{если сила растягивающая, } M_x, M_y > 0, \text{ если моменты}$$

"растягивают" сеч. в I-ой четверти. Внутренние усилия: $N=P$; $M_y=P \cdot x_p$; $M_x=P \cdot y_p$.

$$\text{Напряжения: } \sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p F}{J_y} x + \frac{y_p F}{J_x} y \right) \text{ или } \sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y \right), i_{x,y} = \sqrt{\frac{J_{x,y}}{F}}$$

Уравнение нейтр. линии: $1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y = 0$. Отрезки, отсекаемые нейтр. линией на осях

$$\text{коорд.: } x_H = -\frac{i_y^2}{x_p}; y_H = -\frac{i_x^2}{y_p}. x_P = -\frac{i_y^2}{x_H}; y_P = -\frac{i_x^2}{y_H} - \text{координаты контура ядра.}$$

Изгиб с кручением. Макс. нормальные и касательные напряжения в опасных точках:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}, \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}, \text{ (для круга: } W = \frac{\pi \cdot R^3}{4} - \text{осевой момент}$$

сопротивления, $W_p = \frac{\pi \cdot R^3}{2}$ – полярный момент сопротивления сечения). Главные

$$\text{напряжения в опасных точках: } \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Проверка прочности: по IV-ой теории прочности: $\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma];$

теория Мора: $\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; m = [\sigma_p]/[\sigma_c].$

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1}{W} \left[\frac{1-m}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} \right] \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{1}{W} \sqrt{0,75 M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} \leq [\sigma].$$

$$\text{Приведенный момент: } M_{\text{прМ}} = \frac{1-m}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2};$$

I-ая теория: $M_{\text{прI}} = \frac{1}{2} [\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}];$

II-ая: $M_{\text{прII}} = 0,35\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + 0,65\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}$, при коэффициент Пуассона $\mu=0,3$;

III-ая: $M_{\text{прIII}} = \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}$; IV-ая: $M_{\text{прIV}} = \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M^2}$;

$\sigma_{\text{экр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma]$, момент сопротивления: $W \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}$, диаметр вала: $d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{пр}}}{\pi[\sigma]}}$.

Перемещение, вызванное несколькими силовыми факторами: $\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}$.

Перемещение вызванное силой P, будет: $\Delta_P = P \cdot \delta_P$. Работа внешних сил, действующих на

упругую систему: $A = \int_{\Delta} P d\Delta = \int_0^P P \delta_{PP} dP = \frac{\delta_{PP} P^2}{2}$. $A = \frac{P \cdot \Delta}{2}$ – работа при статическом

действии обобщенной силы на упругую систему.

Работа внутренних сил (сил упругости) в случае плоского изгиба:

$$A = \sum \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^L \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum k \int_0^L \frac{Q^2 dx}{2GF}. \quad \text{Потенциальная энергия } U=A.$$

Теорема о взаимности работ (теорема Бетли): $A_{12} = A_{21}$, $P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}$.

Δ_{11} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_1 ;

Δ_{12} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 ;

Δ_{21} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 ;

Δ_{22} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2 .

$A_{12} = P_1 \cdot \Delta_{12}$ – работа силы P_1 первого состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_2 второго состояния. Аналогично: $A_{21} = P_2 \cdot \Delta_{21}$ – работа силы P_2 второго состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_1 первого состояния..

Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла) Если $P_1=1$ и $P_2=1$, то $P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}$, т.е. $\delta_{12} = \delta_{21}$, в общем случае $\delta_{mn} = \delta_{nm}$. Обобщенное перемещение (формула или интеграл Мора):

$$\Delta_{mn} = \sum \left[\int_0^L \frac{\bar{M}_i^x M_p^x dx}{EJ_x} + \int_0^L \frac{\bar{M}_i^y M_p^y dx}{EJ_y} + \int_0^L \frac{\bar{M}_i^{kp} M_p^{kp} dx}{GJ_k} + \right. \\ \left. + k_x \int_0^L \frac{\bar{Q}_i^x Q_p^x dx}{GF} + k_y \int_0^L \frac{\bar{Q}_i^y Q_p^y dx}{GF} + \int_0^L \frac{\bar{N}_i N_p dx}{EF} \right]$$

Для плоской системы: $\Delta_{mn} = \sum \left[\int_0^L \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ} + \int_0^L \frac{\bar{N}_i N_p ds}{EF} + k \int_0^L \frac{\bar{Q}_i Q_p ds}{GF} \right]$. $\Delta_{mn} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ}$.

Вычисление интегр. Мора способом Верещагина. $\int_L \bar{M}_i M_p dz = \Omega \cdot y_C$. $\Delta_{ip} = \sum \frac{\Omega \cdot y_C}{EJ}$.

Перемножение эпюр, имеющих вид трапеций: $\Omega \cdot y_C = \frac{L}{6} (2ac + 2bd + ad + bc)$.

При действии равномерно распределенной нагрузки на шарнирно опертую балку эпюра строится в виде

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} &= 0 \end{aligned}$$

выпуклой квадратичной параболы, площадь $\Omega = \frac{2hL}{3}$, $h = \frac{qL^2}{8}$, т.е. $\Omega = \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} L = \frac{qL^3}{12}$,

$x_C = L/2$. Для "глухой" заделки при равномерно распределенной нагрузке имеем

вогнутую квадратичную параболу, для которой $\Omega = \frac{hL}{3}$; $h = \frac{qL^2}{2}$, $\Omega = \frac{1}{3} \frac{qL^2}{2} L = \frac{qL^3}{6}$,

$x_C = 3L/4$. Теорема Кастильяно: $\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}$, $U = \sum \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ}$, $\Delta_P = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \frac{\partial M(s)}{\partial P}$.

Канонические уравнения метода сил:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ}; \quad \Delta_{2P} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_2 M_p ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \Delta_{nP} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_n M_p ds}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}; \quad \delta_{22} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{nn} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n ds}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \delta_{13} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{ik} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ},$$

коэффициенты находят по способу Верещагина: $\Delta_{1P} = \frac{\Omega_P \cdot y_{Cp}}{EJ}$; $\delta_{11} = \frac{\Omega_1 \cdot y_{C1}}{EJ}$ и т.д.

При чистом изгибе кривых брусев большой кривизны: $\sigma = \frac{M \cdot y}{eF(r_H - y)}$; $r_H = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}$ –

радиус нейтр. слоя Для прямоугольного сеч. высотой h , с наружным радиусом R_2 и внутренним R_1 : $r_H = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$. При $h/R < 1/2$ $e \approx \frac{J_x}{RF}$. При наличии N : $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot y}{eF(r_H - y)}$.

Условие прочности: $\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot y}{eF(r_H - y)} \leq [\sigma]$, $y = -h_2$ или $y = h_1$.

Продольный изгиб. Устойчивость. Формула Эйлера: $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L^2}$ – для стержня с

шарнирно закрепленными концами. При различных закреплениях: $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\mu L^2}$,

μ – коэффициент приведения длины. При шарнирном закреплении обоих концов стержня $\mu = 1$; для стержня с заделанными концами $\mu = 0,5$; для стержня с одним заделанным и другим свободным концом $\mu = 2$; для стержня с одним заделанным и другим шарнирно закрепленным концом $\mu = 0,7$.

Критическое сжимающее напряжение.: $\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$, $\lambda = \frac{\mu L}{i_{min}}$ – гибкость стержня,

$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$ – наименьший главный радиус инерции. Формула Эйлера применима при

гибкости стержня: $\lambda \geq \lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$. Для $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{кр}$ используется формула Ясинского:

$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda$, где λ_0 , при котором $\sigma_{кр} = \sigma_t$, a, b – опытные данные, для стали Ст3:
 $40 < \lambda < 100$.

Условие устойчивости: $\sigma = \frac{P}{F_{брутто}} \leq [\sigma_y]$; $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / n_y$; $[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma]$. $F_{брутто} = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]}$ –

площадь брутто поперечного сечения, т.е. без учета его ослаблений.